روشی آسان و سریع برای تعیین علامت توابع

سیمین افروزان*
دبیر ریاضی منطقه ۲ تهران

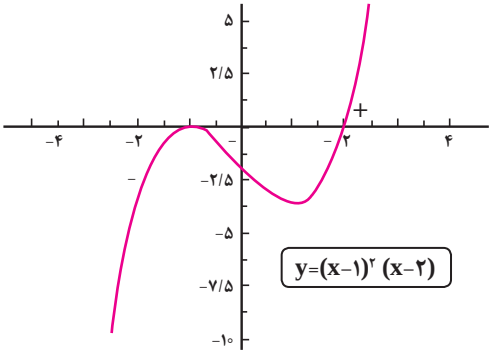
اشاره

مطالب ریاضی اجزای مرتبطی هستند که با تفکر در برخی از آن‌ها می‌توان به دیگری رسید. مطالبی که خواهید خواند نشان می‌دهد که چگونه با تعمق در مفهوم ریشه‌ها و حد در بی‌نهایت می‌توان به روشی آسان و مستدل برای تعیین علامت توابع دست یافت.

کلیدواژه‌ها: تعیین علامت، ریشهٔ ساده، ریشهٔ مضاعف، حد تابع در بی‌نهایت

تعیین علامت یک تابع

برای اینکه مشخص کنیم یک تابع به ازای چه مقدارهایی از متغیر، مثبت و به ازای چه مقدارهایی منفی است، آن را تعیین علامت می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، مشخص می‌کنیم که به ازای چه مقدارهایی از متغیر (x)، منحنی تابع بالای محور طول‌ها و به ازای چه مقدارهایی پایین محور مذکور است. به این منظور y یا ضابطهٔ تابع را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه‌ها و یا طول نقاط تقاطع نمودار تابع با محور طول‌ها را به‌دست آوریم.



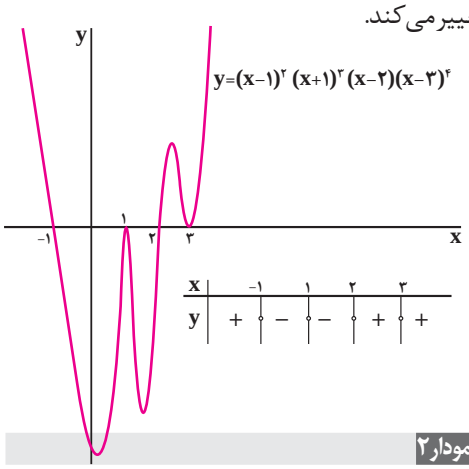
نمودار ۱

انواع ریشه‌ها

ریشهٔ ساده: اگر منحنی تابع، محور طول‌ها را قطع کند و قبل و بعد از نقطه تقاطع تغییر علامت دهد، طول نقطه برخورد را «ریشهٔ ساده» گویند. در صورتی که عبارت تابع را به حاصل‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنیم، ریشه‌های ساده از عامل‌هایی به‌دست می‌آیند که توان فرد دارند.

ریشهٔ مضاعف: «ریشهٔ مضاعف» طول نقطه‌ای است که منحنی تابع در آن نقطه بر محور طول‌ها مماس باشد و قبل و بعد از آن نقطه تابع تغییر علامت ندهد. در صورتی که عبارت تابع را به‌صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسیم، ریشه‌های مضاعف از عامل‌هایی به‌دست می‌آیند که توان زوج دارند. برای مثال، در تابع $y=(x+1)^2(x-2)$، $x=-1$ ریشهٔ مضاعف و $x=2$ ریشهٔ ساده است.

بنابراین در تعیین علامت توابع، ریشه‌های ساده نقش تعیین‌کننده‌ای دارند. همان‌طور که در نمودار ۱ مشاهده می‌کنید، تنها در ریشه‌های ساده علامت تابع تغییر می‌کند.



نمودار ۲

لازم به ذکر است که اگر ریشه‌ای به‌دست نیامد، به این معنی است که علامت تابع همواره مثبت (نمودار تابع بالای محور طول‌ها) و یا همواره منفی (نمودار تابع پایین محور طول‌ها) است. لذا برای تعیین علامت مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱. ریشه‌های ساده را به‌دست می‌آوریم و تنها آن ریشه‌ها را در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم.

۲. چون ریشه‌های ساده دامنهٔ تابع را به چند ناحیهٔ مختلف‌العلامه افراز می‌کنند، کافی است علامت تابع را در یکی از این نواحی تعیین کنیم.

۳. به هر ریشه (ریشهٔ ساده) که رسیدیم، علامت را تغییر می‌دهیم.

برای مشخص کردن علامت اولین خانهٔ سمت راست در جدول تعیین علامت، لازم است رفتار تابع را در بی‌نهایت بررسی کنیم.[۱]

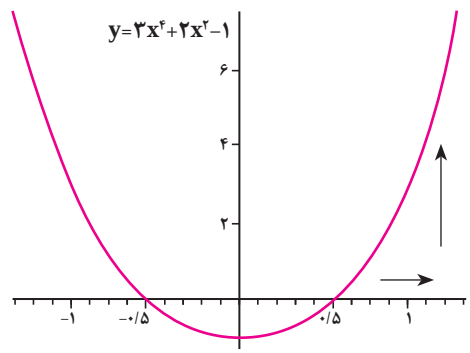
حد یک تابع در مثبت بی‌نهایت

وقتی از حد یک تابع در مثبت بی‌نهایت سخن می‌گوییم، می‌خواهیم رفتار تابع را وقتی متغیر (x) از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌شود، بررسی کنیم. در چندجمله‌ای‌ها کافی است بی‌نهایت را تنها در جملهٔ پیشرو[۲] که سریع‌ترین افزایش را دارد، جایگزین کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

$$\lim_{x\to+\infty}(۳x^۴+۲x^۲-۱)=\lim_{x\to+\infty}x^۴(۳+\frac{۲}{x^۲}-\frac{۱}{x^۴})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^۴\times\lim_{x\to+\infty}(۳+\frac{۲}{x^۲}-\frac{۱}{x^۴})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}۳x^۴=۳(+\infty)^۴=+\infty$$

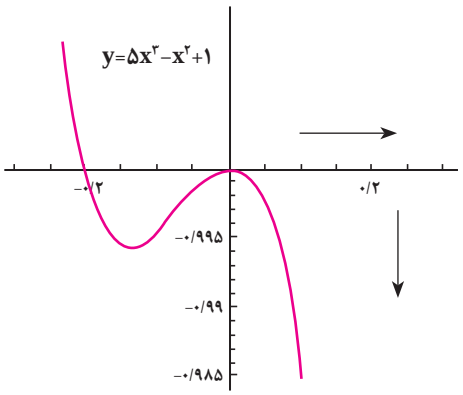


نمودار ۳

پس جایگزین کردن بی‌نهایت در جملهٔ پیشرو، برای به‌دست آوردن حد تابع در بی‌نهایت کافی است.

$$\lim_{x\to+\infty}(-۵x^۳-x^۲+۱)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-۵x^۳=-۵(+\infty)^۳=-\infty$$

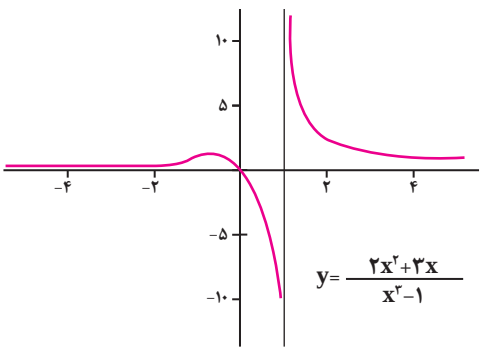


نمودار ۴

و در تابع‌های گویا نیز جمله‌های پیشرو را از صورت و مخرج انتخاب می‌کنیم.

مثال ۱. در این مثال درجهٔ جملهٔ پیشرو مخرج از صورت بیشتر است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۲+۳x}{x^۳-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۲}{x^۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲}{x}=\frac{۲}{+\infty}=۰$$

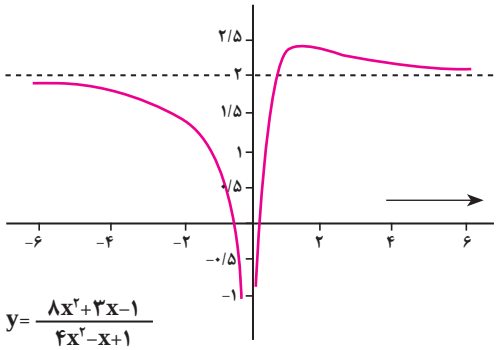


نمودار ۵

در مثال فوق مقدار تابع از بالا (با مقادیر مثبت) به صفر نزدیک می‌شود. پس در مثبت بی‌نهایت، نمودار تابع بالای محور طول‌ها قرار دارد.

مثال ۲. در این مثال، درجهٔ جملهٔ پیشرو صورت و مخرج مساوی هستند.

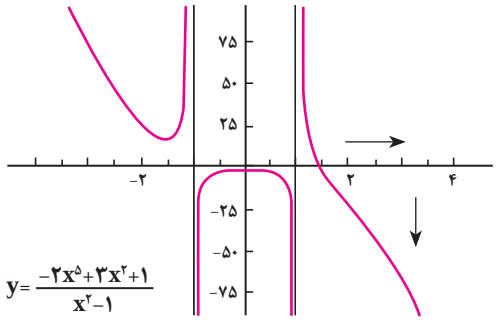
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۸x^۲+۳x-۱}{۴x^۲-x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۸x^۲}{۴x^۲}=۲$$



نمودار ۶

مثال ۳. در این مثال درجهٔ جملهٔ پیشرو صورت از مخرج بیشتر است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-۲x^۵+۳x^۲+۱}{x^۲-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۲x^۵}{x^۲}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-۲x^۳=-۲(+\infty)^۳=-\infty$$



نمودار ۷

حد در بی‌نهایت و جدول تعیین علامت

«علامت تابع بعد از بزرگ‌ترین ریشهٔ ساده، علامت حد تابع در مثبت بی‌نهایت است.» این مطلب بدیهی در نمودارهای مثال‌های قبل به‌خوبی مشهود است. لذا با توجه به رابطه‌ای که بین علامت این حد و ضرایب جملات پیشرو وجود دارد، می‌توان نتیجه گرفت: «اولین خانهٔ سمت راست مربوط به جدول تعیین علامت، در چندجمله‌ای‌ها موافق علامت ضریب جملهٔ پیشرو و در عبارت‌های گویا موافق علامت ضریب حاصل از ضرایب جمله‌های پیشرو در صورت و مخرج است.»[۳]

برای مثال، در تعیین علامت $y=(x-۱)^۳(x+۳)$، اولین خانهٔ سمت راست مثبت است؛ زیرا ضریب جملهٔ پیشرو ($x^۴$) مثبت است.

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
y	+		۰	−	۰	+	

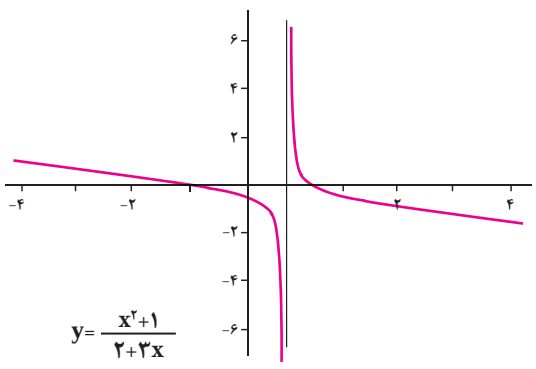
و در تعیین علامت $y=-(x+۱)^۲(x-۲)$، اولین خانهٔ سمت راست منفی است؛ زیرا ضریب جمله پیشرو ($-x^۳$) منفی است.

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y	+	۰	−		

لازم به ذکر است که در این مثال، یک ریشهٔ مضاعف هم داریم. با اینکه این ریشه‌ها تأثیری در تعیین علامت ندارند، ولی در حل برخی از مسائل وجود آن‌ها را نباید نادیده گرفت. برای مثال، جواب نامعادلهٔ $-(x+۱)^۲(x-۲)\le ۰$ عبارت است از: $[۲,+\infty)\cup\{-۱\}$

در تعیین علامت $y=\frac{x^۲-۱}{-۳x+۲}$، اولین خانهٔ سمت راست با توجه به علامت ضریب برآیند جملات پیشرو صورت و مخرج یعنی $-\frac{۱}{۳}$، منفی است.

x	$-\infty$		-۱		$\frac{۲}{۳}$ تعریف نشده		۱		$+\infty$
y	+	۰	−		+		۰	−	



نمودار ۸

و در تابع $y=\frac{-x^2}{1+x^2}$، صفر ریشهٔ مضاعف است. علامت تابع با توجه به علامت $\frac{-1}{1}=-1$ همواره منفی است و تنها در صفر، مقدار تابع صفر است.

x	$-\infty$		$+\infty$
y		−	

نکتهٔ بسیار مهم

در صورتی که در یک تابع گویا صورت و مخرج، ریشه یا ریشه‌های یکسان داشته باشند، باید عامل یا عامل‌های مشترک را ساده و سپس تعیین علامت کرد.

برای مثال، تابع $y=\frac{x^2-9}{3-x}$ با شرط $x\neq 3$ (تابع در $x=3$ تعریف نشده است.)، به $y=-(x+3)$ تبدیل می‌شود. بنابراین:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
y		+	0	−	

لازم به ذکر است که تعیین علامت را می‌توان با محاسبهٔ حد در منفی بی‌نهایت از سمت چپ در جدول شروع کرد. اما این کار مستلزم وقت و دقت بیشتری است، زیرا در منفی بی‌نهایت، تنها ضریب یا ضرایب جملات پیشرو نیستند که علامت حد را معین می‌کنند.

پی‌نوشت

۱. یک راه برای انجام مرحلهٔ دوم این است که مانند تعیین علامت تابع‌های مثلثاتی، عدد دلخواهی از دامنهٔ تابع (غیر از ریشه‌ها) را در ضابطهٔ تابع قرار دهیم. علامت عدد حاصل، علامت تابع را در ناحیه‌ای که آن عدد از آن انتخاب شده است، مشخص می‌کند.

۲. در چندجمله‌ای $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$، جمله‌ای که بیشترین توان را دارد، a_nx^n است که به آن جملهٔ پیشرو گویند.

۳. دانش‌آموزانی که با حد در بی‌نهایت آشنایی ندارند نیز می‌توانند از این نتیجه برای تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها و عبارات گویا استفاده کنند.

* afrouzan@yahoo.com

ایستگاه اول:
بازی و ریاضی!

هوشنگ شرقی

معماهای عدد سال نو

به روال سال‌های گذشته، امسال هم به یمن فرارسیدن بهار دل‌انگیز و حلول سال نو خورشیدی (۱۳۹۴) معماهایی دربارهٔ عدد سال نو داریم. بعد از چالش با این معماها می‌توانید برای مطابقت، به بخش پاسخ‌ها مراجعه کنید. پس این شما و این هم هفت معمای برگزیدهٔ عدد سال نو:

۱. می‌توان نوشت: $۱۳۹۴=۲\times۱۷\times۴۱$. لااقل چند سال دیگر باید منتظر بمانیم تا عدد سال، بار دیگر به‌صورت حاصل‌ضرب سه عدد اول متمایز درآید؟

۲. آیا می‌توانید دو مثلث قائم‌الزاویهٔ مختلف رسم کنید که طول ضلع‌های زاویهٔ قائمه آن‌ها عددهایی طبیعی و طول وتر آن‌ها $\sqrt{۱۳۹۴}$ باشد؟

۳. آیا می‌توانید مکعب مستطیلی رسم کنید که ابعاد آن همگی اعداد طبیعی و طول قطر آن $\sqrt{۱۳۹۴}$ باشد؟

۴. آیا می‌توانید ۱۳۹۴ را به‌صورت مجموع دو عدد اول بنویسید؟

۵. آیا می‌توانید ۱۳۹۴ را به‌صورت مجموع سه عدد اول متمایز بنویسید؟ یا به‌صورت مجموع چهار عدد اول متمایز؟

۶. حداکثر چند عدد اول می‌توانید پیدا کنید که مجموع آن‌ها مساوی ۱۳۹۴ شود؟ رهیافت شما چیست؟

۷. حداکثر چند عدد طبیعی متوالی می‌توانید پیدا کنید که مجموع آن‌ها مساوی ۱۳۹۴ شود؟ رهیافت شما چیست؟